

**Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение-  
гимназия № 94**

ПРИНЯТО:

На заседании педагогического совета  
МАОУ-гимназия № 94

Протокол № 10  
от «29» августа 2025 г.

Утверждаю:

Директор МАОУ – гимназия № 94

С.А. Ярославцев

Приказ № 64/2-О от 29.08.2025 г.



# Рабочая программа по учебному курсу

### «Нестандартные задачи, основанные на теории чисел»

## 9-11 класс

г. Екатеринбург, 2025

## **ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

Новый подход к решению современных задач образования, в особенности глобального характера, предполагает развитие у человека таких способностей, которые позволяли бы ему участвовать в тех переменах, с которыми он сталкивается как личность.

Процессы кардинальных преобразований школы и общества требуют от учителя переориентации его сознания на гуманистические ценности, адекватные характеру творческой (инновационной) педагогической деятельности.

Разработанная программа профильного обучения в классах физико-математического профиля предполагает наличие ряда курсов, способствующих профилизации обучения учащихся. К числу таких курсов относится и курс: «Нестандартные задачи, основанные на теории чисел»

Основные идеи, заложенные в программе профильного физико-математического класса, согласуются с требованиями сегодняшнего дня, когда школа должна воспитывать граждан, от которых требуется умение думать, критически осмысливать и оценивать происходящие в обществе изменения, отстаивать свои мысли и идеи. Эти качества необходимы в любое время и в любом обществе, но особенно они существенны в настоящее время и в нашей стране. И именно математика позволяет целенаправленно управлять развитием этих качеств у учащихся. Поэтому в качестве основы разработки программы профильного обучения в классах физико-математического профиля нами выбран компетентностный подход к обучению, направленный на формирование образовательных компетенций учащихся.

В связи с этим, в данный момент наиболее актуально написание программы, которая позволила бы предусмотреть все вышеуказанные особенности обучения математики в инновационном образовательном учреждении. Курс является предметно-ориентированным, направленным на углубление и расширение знаний и умений школьников по решению задач по теории чисел.

## **СОДЕРЖАНИЕ.**

### **Раздел 1 Натуральные числа**

В данном разделе рассматриваются только натуральные числа. Т.е. числа 1, 2, 3, ... Занятия этого раздела создают основу для самостоятельного получения теоретических фактов и решения задач, относящихся к другим темам. Содержание раздела направлено на формирование представления о единстве методов, применяемых в различных областях математики. Поэтому задачи на занятия подбираются так, чтобы они охватывали как можно больше областей применения общих принципов. Многие идеи, такие как: разумно организованный перебор, анализ с конца, принцип Дирихле, - могут

быть успешно освоены школьниками в 7 классе и в дальнейшем используются как инструмент. Решение задач на отыскание закономерностей, исследование алгоритмов, поиск инварианта стимулирует творческое начало, позволяет школьникам почувствовать атмосферу научного исследования.

В данном разделе рассматриваются: Натуральные числа и системы счисления. Задачи с десятичной системой счисления. Простые и составные натуральные числа. Задачи на свойства простых чисел. Составные числа и формулы сокращенного умножения. Применение основной теоремы арифметики. Признаки делимости и связанные с ними задачи. Задачи на доказательство делимости. Делимость с остатком. НОД и связанные с ним задачи. НОК и связанные с ним задачи. Теоремы о свойствах НОД и НОК.

## Раздел 2 Элементы теории делимости целых чисел

Темы данного раздела составляют темы более близкие к теории чисел: делимость, арифметика остатков, сравнения и их свойства, решение уравнений в целых числах. Основная теорема арифметики вводится в 7 классе без доказательства, ссылка делается на её очевидность. Рассматриваются доказательства неограниченности ряда простых чисел по Евклиду и по Эйлеру. Теоретический материал включает основные положения арифметики остатков, свойства сравнений, лемму Вильсона, малую теорему Ферма, китайскую теорему об остатках, понятие полной системы вычетов, теорему Эйлера. Рассматриваются способы решения линейных и нелинейных диофантовых уравнений. В качестве исследовательских задач предлагаются задачи на исследование тестов простоты простых чисел, отыскание общего вида пифагоровых троек, исследование совершенных чисел, чисел Фибоначчи.

Кроме того, рассматриваются особенности десятичной записи чисел, природа признаков делимости, другие системы счисления. На занятиях по этим темам школьники усваивают различие между свойствами числа самого по себе и его записью в той или иной форме.

## Раздел 3 Уравнения и неравенства в натуральных и целых числах

Этот раздел посвящен одному из наиболее интересных разделов теории чисел, а именно, решение уравнений в целых числах.

Решение в целых числах алгебраических уравнений с целыми коэффициентами более чем с одним неизвестным представляет собой одну из труднейших проблем теории чисел. Проблема решения уравнений в целых числах решена до конца только для уравнений второй степени с двумя неизвестными. Для уравнений любой степени с одним неизвестным она может быть решена с помощью конечного числа проб.

Для уравнений выше второй степени с двумя и более неизвестными весьма трудна не только задача нахождения всех решений в целых числах. Но даже и более простая задача установления существования конечного или бесконечного множества таких решений. Эти задачи и другие предлагаются в качестве исследовательских задач.

К задаче решения в целых числах диофантовых уравнений тесно

примыкает задача отыскания всех рациональных решений подобных уравнений. Она сама по себе довольно сложна и выделяется в отдельный самостоятельный раздел математики. Несмотря на то, что рассмотрение теоретических и практических аспектов решения этой задачи выходит за рамки школьной программы, полезно затронуть (на примерах) те идеи, которые позволяют найти в рациональных числах все решения диофантовых уравнений второго порядка от двух переменных. Эта задача так же предлагается в качестве исследовательской задачи.

В данном разделе мы касаемся спецификации задач на доказательство и решение неравенств в целых числах. Эта специфика, порожденная дискретностью неизвестного, проявляется весьма интересно и разнообразно. На занятиях рассматривается математическая индукция как метод решения неравенств, метод перебора и проблема его организации, «старый и добрый» метод интервалов, неравенства с несколькими неизвестными.

#### Раздел 4 Системы уравнений и неравенств в натуральных и целых числах

Занятия данного раздела посвящены системам уравнений и неравенств в целых числах. При решении систем уравнений и неравенств в целых числах соображения делимости, методы разложения на множители и перебора используются в полном объеме. Для систем организация разумного перебора будет еще более существенной. Новым моментом становится то, что для систем с двумя неизвестными (неважно, уравнений или неравенств) весьма полезным оказывается графическая интерпретация. На занятиях рассматриваются методы: разложения на множители, организация перебора, применение графиков

На занятиях рассматриваются задачи с параметрами и целые числа: задачи, в которых либо неизвестные, либо параметры (либо и то, и другое) принимают целочисленные значения. Как правило, такие задачи являются весьма сложными, хотя есть и исключения. Задачи с натуральными и целочисленными параметрами. Отбор параметров. Условия принадлежности параметрам множеств натуральных либо целых чисел порождают и методы решения таких задач. Рассматриваются различные задачи с целыми числами на квадратный трехчлен. Казалось бы, нет ничего более традиционного для школьной математики, чем задачи с квадратным трехчленом. Однако введение параметра плюс требование целочисленности решения позволяет создавать оригинальные и трудные задачи, что даже на таком материале вызывает затруднения у учащихся. В системах с целочисленными параметрами проблема отбора значений параметра (по сравнению со случаем одного уравнения) значительно усложняется. По существу, организация отбора значений параметра начинает играть ключевую роль.

В этом разделе рассматриваются экстремальные задачи с целыми числами: вводные замечания и вводная задача, экстремум квадратного трехчлена с целочисленным аргументом, задачи, в которых экстремум – целое число.

#### Раздел 5 Рациональные числа

В данном разделе рассматриваются свойства числовых дробей. Сократимые и несократимые дроби. Теоретический материал этого раздела включает: Определения. Основное свойство дроби. Правильные, неправильные и смешанные дроби. Сократимость и несократимость дробей. Представление рациональных чисел десятичными дробями. Определения различных десятичных дробей. Перевод обыкновенных дробей в десятичные дроби и наоборот. На занятиях решаются разные задачи с рациональными числами: преобразование произведений и сумм, уравнения в рациональных числах, приближенные вычисления с рациональными числами.

Занятия этого раздела создают основу для самостоятельного получения теоретических фактов и решения задач, относящимся к другим темам.

#### Раздел 6 Иррациональные числа

Данный раздел посвящен иррациональным числам. Теоретический материал этого раздела включает: Определения и основные утверждения. Арифметические операции и операции извлечения корня. Доказательство иррациональности некоторых чисел: примеры из радикалов. Задачи, решаемые при помощи соображений делимости. Примеры из логарифмов. Доказательство иррациональности значений тригонометрических функций. На занятиях решаются разные задачи с иррациональностью: доказательство неперIODичности функций, нестандартные тригонометрические уравнения, нестандартные задачи с квадратными уравнениями.

Занятия этого раздела создают основу для самостоятельного получения теоретических фактов и решения задач, относящимся к другим темам.

## ЛИЧНОСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

### **1) гражданского воспитания:**

сформированность гражданской позиции обучающегося как активного и ответственного члена российского общества, представление о математических основах функционирования различных структур, явлений, процедур гражданского общества (выборы, опросы и другое), умение взаимодействовать с социальными институтами в соответствии с их функциями и назначением;

### **2) патриотического воспитания:**

сформированность российской гражданской идентичности, уважения к прошлому и настоящему российской математики, ценностное отношение к достижениям российских математиков и российской математической школы, использование этих достижений в других науках, технологиях, сферах экономики;

### **3) духовно-нравственного воспитания:**

осознание духовных ценностей российского народа, сформированность нравственного сознания, этического поведения, связанного с практическим применением достижений науки и деятельностью учёного, осознание личного вклада в построение устойчивого будущего;

**4) эстетического воспитания:**

эстетическое отношение к миру, включая эстетику математических закономерностей, объектов, задач, решений, рассуждений, восприимчивость к математическим аспектам различных видов искусства;

**5) физического воспитания:**

сформированность умения применять математические знания в интересах здорового и безопасного образа жизни, ответственное отношение к своему здоровью (здоровое питание, сбалансированный режим занятий и отдыха, регулярная физическая активность), физическое совершенствование при занятиях спортивно-оздоровительной деятельностью;

**6) трудового воспитания:**

готовность к труду, осознание ценности трудолюбия, интерес к различным сферам профессиональной деятельности, связанным с математикой и её приложениями, умение совершать осознанный выбор будущей профессии и реализовывать собственные жизненные планы, готовность и способность к математическому образованию и самообразованию на протяжении всей жизни, готовность к активному участию в решении практических задач математической направленности;

**7) экологического воспитания:**

сформированность экологической культуры, понимание влияния социально-экономических процессов на состояние природной и социальной среды, осознание глобального характера экологических проблем, ориентация на применение математических знаний для решения задач в области окружающей среды, планирование поступков и оценки их возможных последствий для окружающей среды;

**8) ценности научного познания:**

сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, понимание математической науки как сферы человеческой деятельности, этапов её развития и значимости для развития цивилизации, овладение языком математики и математической культурой как средством познания мира, готовность осуществлять проектную и исследовательскую деятельность индивидуально и в группе.

## **МЕТАПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ**

### **Познавательные универсальные учебные действия**

### **Базовые логические действия:**

выявлять и характеризовать существенные признаки математических объектов, понятий, отношений между понятиями, формулировать определения понятий, устанавливать существенный признак классификации, основания для обобщения и сравнения, критерии проводимого анализа;

воспринимать, формулировать и преобразовывать суждения: утвердительные и отрицательные, единичные, частные и общие, условные;

выявлять математические закономерности, взаимосвязи и противоречия в фактах, данных, наблюдениях и утверждениях, предлагать критерии для выявления закономерностей и противоречий;

делать выводы с использованием законов логики, дедуктивных и индуктивных умозаключений, умозаключений по аналогии;

проводить самостоятельно доказательства математических утверждений (прямые и от противного), выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры, обосновывать собственные суждения и выводы;

выбирать способ решения учебной задачи (сравнивать несколько вариантов решения, выбирать наиболее подходящий с учётом самостоятельно выделенных критериев).

### **Базовые исследовательские действия:**

использовать вопросы как исследовательский инструмент познания, формулировать вопросы, фиксирующие противоречие, проблему, устанавливать искомое и данное, формировать гипотезу, аргументировать свою позицию, мнение;

проводить самостоятельно спланированный эксперимент, исследование по установлению особенностей математического объекта, явления, процесса, выявлению зависимостей между объектами, явлениями, процессами;

самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого наблюдения, исследования, оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений;

прогнозировать возможное развитие процесса, а также выдвигать предположения о его развитии в новых условиях.

### **Работа с информацией:**

выявлять дефициты информации, данных, необходимых для ответа на вопрос и для решения задачи;

выбирать информацию из источников различных типов, анализировать, систематизировать и интерпретировать информацию различных видов и форм представления;

структурировать информацию, представлять её в различных формах, иллюстрировать графически;

оценивать надёжность информации по самостоятельно сформулированным критериям.

## **Коммуникативные универсальные учебные действия**

### **Общение:**

воспринимать и формулировать суждения в соответствии с условиями и целями общения, ясно, точно, грамотно выражать свою точку зрения в устных и письменных текстах, давать пояснения по ходу решения задачи, комментировать полученный результат;

в ходе обсуждения задавать вопросы по существу обсуждаемой темы, проблемы, решаемой задачи, высказывать идеи, нацеленные на поиск решения, сопоставлять свои суждения с суждениями других участников диалога, обнаруживать различие и сходство позиций, в корректной форме формулировать разногласия, свои возражения;

представлять результаты решения задачи, эксперимента, исследования, проекта, самостоятельно выбирать формат выступления с учётом задач презентации и особенностей аудитории.

## **Регулятивные универсальные учебные действия**

### **Самоорганизация:**

составлять план, алгоритм решения задачи, выбирать способ решения с учётом имеющихся ресурсов и собственных возможностей, аргументировать и корректировать варианты решений с учётом новой информации.

### **Самоконтроль, эмоциональный интеллект:**

владеть навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов, владеть способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи;

предвидеть трудности, которые могут возникнуть при решении задачи, вносить коррективы в деятельность на основе новых обстоятельств, данных, найденных ошибок, выявленных трудностей;

оценивать соответствие результата цели и условиям, объяснять причины достижения или недостижения результатов деятельности, находить ошибку, давать оценку приобретённому опыту.

### **Совместная деятельность:**

понимать и использовать преимущества командной и индивидуальной работы при решении учебных задач, принимать цель совместной деятельности, планировать организацию совместной работы, распределять виды работ, договариваться, обсуждать процесс и результат работы, обобщать мнения нескольких людей;

участвовать в групповых формах работы (обсуждения, обмен мнениями, «мозговые штурмы» и иные), выполнять свою часть работы и координировать свои действия с другими членами команды, оценивать



качество своего вклада в общий продукт по критериям, сформулированным участниками взаимодействия.

## **ПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ**

Учащиеся:

- получают представление о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел; овладевают навыками устных, письменных, инструментальных вычислений; используют оценку и прикидку при практических расчётах;
- овладевают символьным языком алгебры, приёмами выполнения тождественных преобразований выражений;
- умеют моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;
- овладевают системой функциональных понятий, развивают умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей;
- формируют умения работать с учебным математическим текстом (анализируют, извлекают необходимую информацию), точно и грамотно выражают свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводят классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;
- умеют по известным формулам и правилам преобразовывать буквенные выражения, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

решают задачи:

- с использованием свойств чисел и систем счисления, делимости, долей и частей, процентов, модулей чисел;
- с использованием свойств степеней и корней;
- на преобразование многочленов и дробно-рациональных выражений;
- с использованием свойств числовых неравенств и методов решения систем неравенств, уравнений и систем уравнений;
- с использованием числовых функций и их графиков;
- с применением производной и её геометрического и физического смыслов при решении задач;
- с использованием свойств и графиков тригонометрических, показательной, логарифмической функций.

## **Тематическое планирование**

## 9 класс

№	Содержание	Часы
1	Определение и простейшие свойства делимости	1
2	Определение и простейшие свойства делимости	1
3	Деление целых чисел с остатком. Определение и теорема о делении с остатком	1
4	Деление целых чисел с остатком. Правила действий с остатками. Принцип Дирихле	1
5	Деление целых чисел с остатком. Правила действий с остатками. Признаки делимости	1
6	Деление целых чисел с остатком. Решение задач. Основанные на рассмотрении остатков	1
7	Простые числа. Определение. Простейшие свойства простых чисел	1
8	Простые числа. Распределение простых чисел во множестве натуральных чисел	1
9	Простые числа. Тесты простоты	1
10	Простые числа. Решение задач на свойства простых чисел	1
11	Арифметика остатков: сравнения по данному модулю. Определение и основные свойства сравнений	1
12	Арифметика остатков: решение задач. Признаки делимости целых чисел и сравнения: теорема Вильсона	1
13	Арифметика остатков: решение олимпиадных задач	1
14	Арифметика остатков: решение конкурсных задач	1
15	Наибольший общий делитель	1
16	Наибольший общий делитель. Решение задач	1
17	Наименьшее общее кратное	1
18	Наименьшее общее кратное. Решение задач	1
19	Каноническое разложение натуральных чисел	1
20	Каноническое разложение натуральных чисел. Решение задач	1
21	Решение олимпиадных задач по теме «НОД и НОК»	1
22	Решение олимпиадных задач на применение канонического разложения натуральных чисел	1
23	Диофантовы уравнения первого порядка с двумя неизвестными	1
24	Основные определения и теоремы. Метод рассмотрения остатков от деления	1

25	Метод последовательного уменьшения по модулю коэффициентов при неизвестных	1
26	Задачи с диофантовыми уравнениями первого порядка	1
27	Нелинейные диофантовы уравнения. Диофантовы уравнения второго и высших порядков. Типы уравнений второго порядка. Приемы решения.	1
28	Уравнений в целых числах второго и высших порядков. Соображения делимости, основная теорема арифметики	1
29	НОД и НОК двух чисел. Метод разложения на множители	1
30	Метод решения уравнения относительно одного из неизвестных. Нестандартные решения уравнений.	1
31	Методы решений нелинейных уравнений в целых и натуральных числах	1
32	Методы решений нелинейных уравнений в целых и натуральных числах	1
33	Решение олимпиадных задач по теме «Уравнения в натуральных и целых числах»	1
34	Решение олимпиадных задач по теме «Уравнения в натуральных и целых числах»	1

Поурочное планирование курса  
«Нестандартные задачи, основанные на теории чисел»  
10 класс (34 часа)

№	Содержание	Часы
1	Натуральные числа и системы счисления. Задачи с десятичной системой счисления	1
2	Простые и составные натуральные числа. Задачи на свойства простых чисел	1
3	Составные числа и формулы сокращенного умножения. Применение основной теоремы арифметики	1
4	Признаки делимости и связанные с ними задачи. Задачи на доказательство делимости	1
5	Делимость с остатком. Задачи, основанные на рассмотрении остатков	1
6	Примеры сочетания нескольких методов	1
7	НОД и связанные с ним задачи	1
8	НОД и связанные с ним задачи	1
9	НОК и связанные с ним задачи	1
10	НОК и связанные с ним задачи	1
11	Теоремы о свойствах НОД и НОК	1

12	Теоремы о свойствах НОД и НОК	1
13	Решение олимпиадных задач по теме «Натуральные числа»	1
14	Решение олимпиадных задач по теме «Натуральные числа»	1
15	Задачи на делимость. Делимость с остатком	1
16	Обобщенные формулы сокращенного умножения. Применение обобщенных формул сокращенного умножения в задачах на делимость	1
17	Комбинированные методы решения задач на делимость	1
18	Комбинированные методы решения задач на делимость	1
19	Диофантовы уравнения первого порядка с двумя неизвестными. Основные определения и теоремы. Метод рассмотрения остатков от деления	1
20	Метод последовательного уменьшения по модулю коэффициентов. Задачи с диофантовыми уравнениями первого порядка	1
21	Диофантовы уравнения второго и высших порядков. Типы уравнений второго порядка. Соображения делимости, основная теорема арифметики	1
22	Метод разложения на множители. Метод решения уравнения относительно одного из неизвестных. Нестандартные решения уравнений.	1
23	Неравенства в целых числах. Математическая индукция как метод решения неравенств	1
24	Метод перебора и проблема его организации. Метод интервалов. Неравенства с несколькими неизвестными	1
25	Системы уравнений и неравенств в целых числах	1
26	Разложение на множители	1
27	Организация перебора	1
28	Применение графики	1
29	Задачи с параметрами в целых числах	1
30	Задачи с натуральными и целочисленными параметрами	1
31	Отбор параметров	1
32	Различные задачи с целыми числами на квадратный трехчлен	1
33	Системы уравнений и неравенств с целыми параметрами или целыми решениями	1
34	Системы уравнений и неравенств с целыми параметрами или целыми решениями	1

«Нестандартные задачи, основанные на теории чисел»  
11 класс (34часа)

№	Содержание	Часы
1	Экстремальные задачи в целых числах. Вводные замечания и вводная задача	1
2	Экстремум квадратного трехчлена с целочисленным аргументом	1
3	Экстремум квадратного трехчлена с целочисленным аргументом	1
4	Как искать экстремум, если $f(n)$ не является квадратным трехчленом	1
5	Как искать экстремум, если $f(n)$ не является квадратным трехчленом	1
6	Задачи, в которых экстремум – целое число	1
7	Неравенства, делимость и перебор	1
8	Конкурсные задачи по теме «Целые числа»	1
9	Конкурсные задачи по теме «Целые числа»	1
10	Конкурсные задачи по теме «Целые числа»	1
11	Свойства числовых дробей	1
12	Сократимые и несократимые дроби	1
13	Основное свойство дроби. Правильные, неправильные и смешанные дроби	1
14	Сократимость и несократимость дробей	1
15	Преобразование произведений и сумм	1
16	Уравнения в рациональных числах, приближения рациональными числами	1
17	Разные задачи с рациональными числами	1
18	Конкурсные задачи по теме «. Рациональные числа»	1
19	Конкурсные задачи по теме «. Рациональные числа»	1
20	Конкурсные задачи по теме «. Рациональные числа»	1
21	Доказательство иррациональности некоторых чисел: примеры из радикалов	1
22	Задачи, решаемые при помощи соображений делимости. Примеры из логарифмов	1
23	Доказательство иррациональности значений тригонометрических функций	1
24	Нестандартные тригонометрические уравнения	1
25	Нестандартные задачи с квадратными уравнениями	1
26	Разные задачи с иррациональностью	1

27	Конкурсные задачи по теме «Иррациональные числа»	1
28	Конкурсные задачи по теме «Иррациональные числа»	1
29	Конкурсные задачи по теме «Иррациональные числа»	1
30	Обобщение. Решение задач ЕГЭ	1
31	Обобщение. Решение задач ЕГЭ	1
32	Обобщение. Решение задач ЕГЭ	1
33	Обобщение. Решение задач ЕГЭ	1
34	Обобщение. Решение задач ЕГЭ	1