

**Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение-
гимназия № 94**

ПРИНЯТО:

На заседании педагогического совета
МАОУ-гимназия № 94

Протокол № 10
от «29» августа 2025 г.



Утверждаю:

Директор МАОУ – гимназия № 94

С.А. Ярославцев

Приказ № 64/2-О
от 29.08.2025 г.

**ПРОГРАММА ПО
ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ
«Теория чисел»**

Екатеринбург, 2025

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

АКТУАЛЬНОСТЬ СОЗДАНИЯ ПРОГРАММЫ

Рабочая программа факультативного курса по математике для обучающихся 7-11 класса «Нестандартные задачи, основанные на теории чисел».

Новый подход к решению современных задач образования, в особенности глобально-го характера, предполагает развитие у человека таких способностей, которые позволяли бы ему участвовать в тех переменах, с которыми он сталкивается как личность.

Коренные изменения в обществе создали реальные предпосылки для демократизации школы, для обновления системы образования. Пришёл в действие механизм саморазвития школы. Выявилось, что его источники находятся в творчестве учителей, в их инновационной деятельности, которая нашла отражение в создании школ нового типа, в разработке и введении элементов нового содержания образования, новых образовательных технологий, укреплении связей школы с наукой.

Процессы кардинальных преобразований школы и общества требуют от учителя переориентации его сознания на гуманистические ценности, адекватные характеру творческой (инновационной) педагогической деятельности.

Задача педагога, работающего в инновационном режиме, прежде всего, заключается в том, чтобы помочь учащимся осознать свои возможности и создать условия для их оптимального развития.

Таким образом, для личности учащихся актуален не процесс получения знаний, умений и навыков, а учение и самообразование, то есть, важны знания и умения как средства развития личности.

Новые стандарты образования предполагают внесение значительных изменений в структуру и содержание, цели и задачи образования, смещение акцентов с одной задачи — вооружить учащегося знаниями — на другую — формировать у него общеучебные умения и навыки, как основу учебной деятельности. Учебная деятельность школьника должна быть освоена им в полной мере, со стороны всех своих компонентов: ученик должен быть ориентирован на нахождение общего способа решения задач (выделение учебной задачи), хорошо владеть системой действий, позволяющих решать эти задачи (учебные действия); уметь самостоятельно контролировать процесс своей учебной работы (контроль) и адекватно оценивать качество его выполнения (оценка), только тогда ученик становится субъектом учебной деятельности.

Школа должна воспитывать граждан, от которых требуется умение думать, критически осмысливать и оценивать происходящие в обществе изменения, отстаивать свои мысли и идеи. Эти качества необходимы в любое время и в любом обществе, но особенно они существенны в настоящее время и в нашей стране. И именно математика позволяет целенаправленно управлять развитием этих качеств у учащихся.

Задачи и вопросы, связанные с элементами теории чисел, нередко встречались на вступительных экзаменах. С 2010 году эти задачи ввели обязательными на ЕГЭ по математике (ЕГЭ профиль, задача 18) . Прежде всего, это задачи с натуральной и целочисленной арифметикой. Встречаются и задачи, связанные с делимостью, сократимостью дробей, а так же с доказательством рациональности либо иррациональности какого-либо числа. Наконец, нельзя не упомянуть задачи по тригонометрии, в которых при отборе корней возникают диофантовы уравнения.

Между тем в школе натуральная и целочисленная арифметика изучается в младших классах, и к моменту ЕГЭ многие успевают ее основательно забыть. Учебных пособий для школьников, в которых изучение теории чисел разумно сочеталось бы с разбором задач различного уровня сложности, в том числе и конкурсных задач, недостаточно.

Вашему вниманию предлагается факультативный курс, затрагивающий традиционно сложные вопросы школьной математики. Практика преподавания показывает, что многие задачи, связанные с делимостью целых чисел, нестандартны, поэтому их решение вызывает

большие затруднения. В данном курсе рассматриваются вопросы делимости на множество целых чисел и методы решения в целых числах некоторых типов диофантовых уравнений.

Предлагаемый курс предназначен для учащихся 7 – 11 классов.

К уже известным темам, таким как

- делимость двух целых чисел;
- наибольший общий делитель целых чисел;
- наименьшее общее кратное целых чисел;
- способы нахождения НОД и НОК,

добавлены темы, которые в школьном курсе не рассматривались.

А именно:

- формулируются и доказываются теорема о делении с остатком и основная теорема арифметики;
- подробно рассматриваются свойства простых и составных чисел;
- на основе теоремы о делении с остатком разбирается еще один способ нахождения НОД целых чисел – алгоритм Евклида;
- применяются свойства НОД к решению уравнений в целых числах;
- рассматриваются некоторые вопросы теории сравнений.

Решение различного вида уравнений является одной из содержательных линий школьного курса математики, но при этом, методам решения уравнений с несколькими неизвестными времени уделено недостаточно. Вместе с тем, решение уравнений от нескольких неизвестных в целых числах является одной из древнейших математических задач. Большинство методов решения таких уравнений основаны на теории делимости целых чисел, интерес к которой в настоящее время определяется бурным развитием информационных технологий. В связи с этим, учащимся будет небезынтересно познакомиться с методами решения некоторых уравнений в целых числах. На олимпиадах разного уровня предлагаются задания на решение какого-либо уравнения в целых числах.

Изучение теории чисел, начиная с 7 класса, позволяет расширить список методов, с помощью которых можно решить разные математические задачи на уроках, ВПР, олимпиадах и экзаменах.

НОВИЗНА ПРОГРАММЫ

Каждый ученик носитель личного опыта. Он, прежде всего, стремится к раскрытию собственного потенциала, данного ему от природы, в силу индивидуальной организации, и нужно только ему помочь.

Таким образом, возникает необходимость в создании учебной программы, в которую были бы заложены все необходимые условия для овладения теми видами деятельности, которые дают ученику широкую ориентацию в системе субъектно-субъектных отношений, где ученик выступает как активный творец этих отношений (а не только их созерцатель).

Значит, раскрытие индивидуальных познавательных возможностей каждого ученика возможно только при организации личностно-ориентированного обучения, что обуславливает новизну данной программы, состоящую в разработке математического содержания, форм и методов обучения математике, направленных на формирование интереса к математике и развитии способностей и индивидуально-личностных качеств, значимых для учащихся.

При организации личностно-ориентированного обучения необходимо помнить, что творцом способов является субъект учения – ученик. Деятельность учащегося – основа всего учебно-воспитательного процесса. Необходимые знания по математике учащиеся приобретают только путем самостоятельных интеллектуальных усилий, а учитель, опираясь на различные методы и средства, только направляет, организует, учебный процесс, создавая определенные условия:

Первая группа (связанная с содержанием учебного материала) состоит из нескольких условий:

- показ приоритета ведущей математической идеи курса;
- новизна и разнообразие материала школьного курса математики, сведения из истории математики;
- нестандартные математические задачи, основанные на теории чисел;
- изящество методов решения задач;
- показ многочисленных приложений теории чисел, осознание ее значения.

Вторая группа (связанная с организацией учебного процесса):

- разнообразие системы уроков, нешаблонное их построение;
- активизация деятельности учащихся путем организации самостоятельных, творческих работ, дидактических игр и соревнований, различные формы учёта знаний.

Третья группа (связанная с отношением личности):

- прирождённые математические способности;
- успех в изучении предмета и поощрения.

В указанной содержательной части программы, выделены:

- Принципы отбора содержания направленного на реализацию развития творческих способностей учащихся;
- Перечень основных, содержательных линий теории чисел, являющихся базовыми;
- В каждой содержательной линии выделены базовые темы и определён перечень обще-логических исследовательских умений и конкретно математических учебных умений;
- Содержание обучения, по теории чисел с 7 по 11 классы;
- Тематическое планирование учебного материала;
- Структурные связи между предложенной программой курса теории чисел и программой по математике.

Подход, основанный на личностно-ориентированной системе обучения опирающийся на следующих исходных положениях:

- приоритет индивидуальности, самооценки ребёнка;
- при конструировании и реализации учебного процесса необходима особая работа по выявлению опыта каждого ученика; контроль, за складывающимися способами учебной работы; сотрудничество ученика и учителя, направленное на обмен различного содержания опыта; специальная организация коллективно распределенной деятельности между всеми участниками учебного процесса;
- основным результатом учения должно быть развитие познавательных способностей на основе овладения соответствующими знаниями и умениями;
- залогом успешности обучения является желание ребёнка учиться, а это возможно только при учёте условий стимулирующих возникновение и развитие математических интересов.

Виды деятельности, через которые осуществляется активное отношение ученика к учебному процессу:

- обоснованность содержания учебного материала, его связь с жизнью и практикой (проблемный, эмоциональный характер изложения);
- самостоятельное добывание знаний;
- рациональные приёмы учебной работы;
- логические и математические задачи, упражнения по развитию исследовательской и поисковой активности и применением метода управляемого воображения.

Средства способствующие развитию самостоятельности учащихся:

- Использование информационных технологий;
- Использование тестов;
- Дифференцированные задания.

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПРОГРАММЫ

В педагогическом процессе развитие творческих способностей учащегося целесообразно рассматривать как развитие его внутреннего деятельностного потенциала, способности быть творцом, активным созидателем своей жизни, уметь ставить цель, искать способы её достижения, быть способным к свободному выбору и ответственности за него, максимально использовать свои способности, стремясь выйти за их пределы. Чтобы все это реализовать на практике, необходимы системный подход к обучению учащихся, своевременная диагностика их способностей, соответствующее их потребностям программное обеспечение, предъявление им заданий более высокого мыслительного уровня, а также профессионализм учителя.

В качестве методологических выступают положения о личности как субъекте собственной жизнедеятельности и отношений, идеи системного подхода. Идеи самоактуализации личности, гуманизации учебного процесса.

Уровень математической подготовки определяется не перечнем изучаемых понятий и теорем, а умение решать задачи. Поэтому в качестве неотъемлемого измерительного уровня подготовленности школьника выступает система задач. Именно в системе задач отражен уровень требований. Система задач не только является основным измерителем подготовленности учащихся на выходе, но постоянно используется в процессе обучения. По моему мнению, не нужно опасаться, что обучение может свестись к натаскиванию на решение данного набора задач. Я стараюсь создать систему задач, для освоения которой необходим полноценный учебный процесс.

Методически занятия могут строиться по-разному. В основном предполагается следующий план построения занятия. Учащимся предлагается задача, позволяющая рассмотреть основные аспекты новой темы, и после недолгой самостоятельной работы (5 – 7 минут) проводится коллективный разбор проблем, возникшие при ее решении, и возможных методов их преодоления. Разбор может проводить как преподаватель, так и один или несколько учеников. Далее других продвинувшихся в решении задачи. Главным на данном этапе является создание атмосферы коллективного творчества. Предварительная самостоятельная работа позволяет учащимся более осмысленно воспринимать материал и участвовать в дискуссии. После того, как задача решена, преподаватель проводит повторный разбор задачи, акцентируя внимание ребят на наиболее принципиальных моментах проведенных рассуждений.

ЦЕЛИ ДАННОЙ ПРОГРАММЫ

Центральное направление данной программы – развитие математического мышления учащихся, создание среды, способствующей раскрытию способностей, побуждение школьников к самостоятельным занятиям. Раскрытие одаренности не сводится к углубленному обучению, усвоению дополнительного объема информации. Овладение новыми знаниями подчиняется задаче усвоения методов и стиля, свойственных математике. Одна из основных задач – развитие навыков математических рассуждений, полных и строгих доказательств, отыскание слабостей и неточностей в предлагаемых рассуждениях. Один из основных принципов – педагогическая четкость. Отказ от имитации доказательств в том случае, если строгое доказательство не может быть проведено при имеющихся у учащихся уровне подготовки, проведение четкой границы между строгим доказательством и иллюстрацией.

Цель курса: развитие устойчивого познавательного интереса к математике через знакомство учащихся с методами решения нестандартных задач, основанных на теории чисел.

Достигать эти цели предполагается через решение следующих задач:

- Учёт условий стимулирующих возникновение и развитие математических интересов.
- Учить школьников применять общенаучные методы поиска решения задач.

- Выявление способных детей, создание условий для их творческих способностей, формирование потребности учащихся к саморазвитию.
- Приобщение учеников к научно-исследовательской деятельности.
- Развитие математического мышления творческой активности учащихся то есть развитие таких качеств мышления как гибкость, самостоятельность, критичность, рациональность.
- Углубление и расширение изучаемого материала.

Программа рассчитана на:

- 7 класс – 34 часа;
- 8 класс – 34 часа;
- 9 класс – 34 часа;
- 10 – 11 классы – 68 часов.

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ КУРСА

ЛИЧНОСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Личностные результаты освоения программы учебного курса «Алгебра» характеризуются:

1) патриотическое воспитание:

проявлением интереса к прошлому и настоящему российской математики, ценностным отношением к достижениям российских математиков и российской математической школы, к использованию этих достижений в других науках и прикладных сферах;

2) гражданское и духовно-нравственное воспитание:

готовностью к выполнению обязанностей гражданина и реализации его прав, представлением о математических основах функционирования различных структур, явлений, процедур гражданского общества (например, выборы, опросы), готовностью к обсуждению этических проблем, связанных с практическим применением достижений науки, осознанием важности морально-этических принципов в деятельности учёного;

3) трудовое воспитание:

установкой на активное участие в решении практических задач математической направленности, осознанием важности математического образования на протяжении всей жизни для успешной профессиональной деятельности и развитием необходимых умений, осознанным выбором и построением индивидуальной траектории образования и жизненных планов с учётом личных интересов и общественных потребностей;

4) эстетическое воспитание:

способностью к эмоциональному и эстетическому восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений, умению видеть математические закономерности в искусстве;

5) ценности научного познания:

ориентацией в деятельности на современную систему научных представлений об основных закономерностях развития человека, природы и общества, пониманием математической науки как сферы человеческой деятельности, этапов её развития и значимости для развития цивилизации, овладением языком математики и математической культурой как средством познания мира, овладением простейшими навыками исследовательской деятельности;

6) физическое воспитание, формирование культуры здоровья и эмоционального благополучия:

готовностью применять математические знания в интересах своего здоровья, ведения здорового образа жизни (здоровое питание, сбалансированный режим занятий и отдыха, регулярная физическая активность), сформированностью навыка рефлексии, признанием своего права на ошибку и такого же права другого человека;

7) экологическое воспитание:

ориентацией на применение математических знаний для решения задач в области сохранности окружающей среды, планирования поступков и оценки их возможных последствий для окружающей среды, осознанием глобального характера экологических проблем и путей их решения;

8) адаптация к изменяющимся условиям социальной и природной среды:

готовностью к действиям в условиях неопределенности, повышению уровня своей компетентности через практическую деятельность, в том числе умение учиться у других людей, приобретать в совместной деятельности новые знания, навыки и компетенции из опыта других;

необходимостью в формировании новых знаний, в том числе формулировать идеи, понятия, гипотезы об объектах и явлениях, в том числе ранее неизвестных, осознавать дефициты собственных знаний и компетентностей, планировать своё развитие;

способностью осознавать стрессовую ситуацию, воспринимать стрессовую ситуацию как вызов, требующий контрмер, корректировать принимаемые решения и действия, формулировать и оценивать риски и последствия, формировать опыт.

МЕТАПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Познавательные универсальные учебные действия

Базовые логические действия:

- выявлять и характеризовать существенные признаки математических объектов, понятий, отношений между понятиями, формулировать определения понятий, устанавливать существенный признак классификации, основания для обобщения и сравнения, критерии проводимого анализа;

- воспринимать, формулировать и преобразовывать суждения: утвердительные и отрицательные, единичные, частные и общие, условные;
- выявлять математические закономерности, взаимосвязи и противоречия в фактах, данных, наблюдениях и утверждениях, предлагать критерии для выявления закономерностей и противоречий;
- делать выводы с использованием законов логики, дедуктивных и индуктивных умозаключений, умозаключений по аналогии;
- разбирать доказательства математических утверждений (прямые и от противного), проводить самостоятельно несложные доказательства математических фактов, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры, обосновывать собственные рассуждения;
- выбирать способ решения учебной задачи (сравнивать несколько вариантов решения, выбирать наиболее подходящий с учётом самостоятельно выделенных критериев).

Базовые исследовательские действия:

- использовать вопросы как исследовательский инструмент познания, формулировать вопросы, фиксирующие противоречие, проблему, самостоятельно устанавливать исключимое и данное, формировать гипотезу, аргументировать свою позицию, мнение;
- проводить по самостоятельно составленному плану несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой;
- самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведённого наблюдения, исследования, оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений;
- прогнозировать возможное развитие процесса, а также выдвигать предположения о его развитии в новых условиях.

Работа с информацией:

- выявлять недостаточность и избыточность информации, данных, необходимых для решения задачи;
- выбирать, анализировать, систематизировать и интерпретировать информацию различных видов и форм представления;
- выбирать форму представления информации и иллюстрировать решаемые задачи схемами, диаграммами, иной графикой и их комбинациями;
- оценивать надёжность информации по критериям, предложенным учителем или сформулированным самостоятельно.

Коммуникативные универсальные учебные действия:

- воспринимать и формулировать суждения в соответствии с условиями и целями общения, ясно, точно, грамотно выражать свою точку зрения в устных и письменных текстах, давать пояснения по ходу решения задачи, комментировать полученный результат;
- в ходе обсуждения задавать вопросы по существу обсуждаемой темы, проблемы, решаемой задачи, высказывать идеи, нацеленные на поиск решения, сопоставлять свои суждения с суждениями других участников диалога, обнаруживать различие и сходство позиций, в корректной форме формулировать разногласия, свои возражения;

- представлять результаты решения задачи, эксперимента, исследования, проекта, самостоятельно выбирать формат выступления с учётом задач презентации и особенностей аудитории;
- понимать и использовать преимущества командной и индивидуальной работы при решении учебных математических задач;
- принимать цель совместной деятельности, планировать организацию совместной работы, распределять виды работ, договариваться, обсуждать процесс и результат работы, обобщать мнения нескольких людей;
- участвовать в групповых формах работы (обсуждения, обмен мнениями, мозговые штурмы и другие), выполнять свою часть работы и координировать свои действия с другими членами команды, оценивать качество своего вклада в общий продукт по критериям, сформулированным участниками взаимодействия.

Регулятивные универсальные учебные действия

Самоорганизация:

- самостоятельно составлять план, алгоритм решения задачи (или его часть), выбирать способ решения с учётом имеющихся ресурсов и собственных возможностей, аргументировать и корректировать варианты решений с учётом новой информации.

Самоконтроль, эмоциональный интеллект:

- владеть способами самопроверки, самоконтроля процесса и результата решения математической задачи;
- предвидеть трудности, которые могут возникнуть при решении задачи, вносить корректировки в деятельность на основе новых обстоятельств, найденных ошибок, выявленных трудностей;
- оценивать соответствие результата деятельности поставленной цели и условиям, объяснять причины достижения или недостижения цели, находить ошибку, давать оценку приобретённому опыту.

Предметные результаты по математике.

Учащиеся:

- получают представление о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел; овладевают навыками устных, письменных, инструментальных вычислений; используют оценку и прикидку при практических расчётах;
- овладевают символным языком алгебры, приёмами выполнения тождественных преобразований выражений;
- умеют моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;
- овладевают системой функциональных понятий, развиваются умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей;
- формируют умения работать с учебным математическим текстом (анализируют, извлекают необходимую информацию), точно и грамотно выражают свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводят классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;
- умеют по известным формулам и правилам преобразовывать буквенные выражения, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

решают задачи:

- с использованием свойств чисел и систем счисления, делимости, долей и частей, процентов, модулей чисел;
- с использованием свойств степеней и корней;
- на преобразование многочленов и дробно-рациональных выражений;
- с использованием свойств числовых неравенств и методов решения систем неравенств, уравнений и систем уравнений;
- с использованием числовых функций и их графиков;
- с применением производной и её геометрического и физического смыслов при решении задач;
- с использованием свойств и графиков тригонометрических, показательной, логарифмической функций.

Программа составлена на основании программ, разработанных Московским центром непрерывного математического образования, материалов Кировских летних математических школ, материалов заочной физико-технической школы при МФТИ, программы курса алгебры, читавшегося в школе им. А. Н. Колмогорова на двухгодичном потоке в 2003 году, программы факультативного курса Московского государственного института электронной техники «Основы теории делимости. Решение уравнений в целых числах», авторы: В. В. Барбушкин, И. Б. Кожухов, А. А. Прокофьев, Т. П. Фадеичева.

ОПИСАНИЕ РАЗДЕЛОВ ПРОГРАММЫ

Раздел 1 *Натуральные числа*

В данном разделе рассматриваются только натуральные числа. Т.е. числа 1, 2, 3, ... Занятия этого раздела создают основу для самостоятельного получения теоретических фактов и решения задач, относящимся к другим темам. Содержание раздела направлено на формирование представления о единстве методов, применяемых в различных областях математики. Поэтому задачи на занятия подбираются так, чтобы они охватывали как можно больше областей применения общих принципов. Многие идеи, такие как: разумно организованный перебор, анализ с конца, принцип Дирихле, - могут быть успешно освоены школьниками в 7 классе и в дальнейшем используются как инструмент. Решение задач на отыскание закономерностей, исследование алгоритмов, поиск инварианта стимулирует творческое начало, позволяет школьникам почувствовать атмосферу научного исследования.

В данном разделе рассматриваются: Натуральные числа и системы счисления. Задачи с десятичной системой счисления. Простые и составные натуральные числа. Задачи на свойства простых чисел. Составные числа и формулы сокращенного умножения. Применение основной теоремы арифметики. Признаки делимости и связанные с ними задачи. Задачи на доказательство делимости. Делимость с остатком. НОД и связанные с ним задачи. НОК и связанные с ним задачи. Теоремы о свойствах НОД и НОК.

Раздел 2 *Элементы теории делимости целых чисел*

Темы данного раздела составляют темы более близкие к теории чисел: делимость, арифметика остатков, сравнения и их свойства, решение уравнений в целых числах. Основная теорема арифметики вводится в 7 классе без доказательства, ссылка делается на её очевидность. Рассматриваются доказательства неограниченности ряда простых чисел по Евклиду и по Эйлеру. Теоретический материал включает основные положения арифметики остатков, свойства сравнений, лемму Вильсона, малую теорему Ферма, китайскую теорему об остатках, понятие полной системы вычетов, теорему Эйлера. Рассматриваются способы решения линейных и нелинейных диофантовых уравнений. В качестве исследовательских задач предлагаются задачи на исследование тестов простоты простых чисел, отыскание общего вида пифагоровых троек, исследование совершенных чисел, чисел Фибоначчи.

Кроме того, рассматриваются особенности десятичной записи чисел, природа признаков делимости, другие системы счисления. На занятиях по этим темам школьники усваивают различие между свойствами числа самого по себе и его записью в той или иной форме.

Раздел 3 *Уравнения и неравенства в натуральных и целых числах*

Этот раздел посвящен одному из наиболее интересных разделов теории чисел, а именно, решению уравнений в целых числах.

Решение в целых числах алгебраических уравнений с целыми коэффициентами более чем с одним неизвестным представляет собой одну из最难нейших проблем теории чисел. Проблема решения уравнения уравнений в целых числах решена до конца только для уравнений второй степени с двумя неизвестными. Для уравнений любой степени с одним неизвестным она может быть решена с помощью конечного числа проб.

Для уравнений выше второй степени с двумя и более неизвестными весьма трудна не только задача нахождения всех решений в целых числах. Но даже и более простая задача установления существования конечного или бесконечного множества таких решений. Эти задачи и другие предлагаются в качестве исследовательских задач.

К задаче решения в целых числах диофантовых уравнений тесно примыкает задача отыскания всех рациональных решений подобных уравнений. Она сама по себе довольно сложна и выделяется в отдельный самостоятельный раздел математики. Несмотря на то, что рассмотрение теоретических и практических аспектов решения этой задачи выходит за рамки школьной программы, полезно затронуть (на примерах) те идеи, которые позволяют найти в рациональных числах все решения диофантовых уравнений второго порядка от двух переменных. Эта задача так же предлагаются в качестве исследовательской задачи.

В данном разделе мы касаемся спецификации задач на доказательство и решение неравенств в целых числах. Эта специфика, порожденная дискретностью неизвестного, проявляется весьма интересно и разнообразно. На занятиях рассматривается математическая индукция как метод решения неравенств, метод перебора и проблема его организации, «старый и добрый» метод интервалов, неравенства с несколькими неизвестными.

Раздел 4 Системы уравнений и неравенств в натуральных и целых числах

Занятия данного раздела посвящены системам уравнений и неравенств в целых числах. При решении систем уравнений и неравенств в целых числах соображения делимости, методы разложения на множители и перебора используются в полном объеме. Для систем организации разумного перебора будет еще более существенной. Новым моментом становится то, что для систем с двумя неизвестными (неважно, уравнений или неравенств) весьма полезным оказывается графическая интерпретация. На занятиях рассматриваются методы: разложения на множители, организация перебора, применение графиков

На занятиях рассматриваются задачи с параметрами и целые числа: задачи, в которых либо неизвестные, либо параметры (либо и то, и другое) принимают целочисленные значения. Как правило, такие задачи являются весьма сложными, хотя есть и исключения. Задачи с натуральными и целочисленными параметрами. Отбор параметров. Условия принадлежности параметрам множествам натуральных либо целых чисел порождают и методы решения таких задач. Рассматриваются различные задачи с целыми числами на квадратный трехчлен. Казалось бы, нет ничего более традиционного для школьной математики, чем задачи с квадратным трехчленом. Однако введение параметра плюс требование целочисленности решения позволяет создавать оригинальные и трудные задачи, что даже на таком материале вызывает затруднения у учащихся. В системах с целочисленными параметрами проблема отбора значений параметра (по сравнению со случаем одного уравнения) значительно усложняется. По существу, организация отбора значений параметра начинает играть ключевую роль.

В этом разделе рассматриваются экстремальные задачи с целыми числами: вводные замечания и вводная задача, экстремум квадратного трехчлена с целочисленным аргументом, задачи, в которых экстремум – целое число.

Раздел 5 Рациональные числа

В данном разделе рассматриваются свойства числовых дробей. Сократимые и несократимые дроби. Теоретический материал этого раздела включает: Определения. Основное свойство дроби. Правильные, неправильные и смешанные дроби. Сократимость и несократимость дробей. Представление рациональных чисел десятичными дробями. Определения различных десятичных дробей. Перевод обыкновенных дробей в десятичные дроби и наоборот. На занятиях решаются разные задачи с рациональными числами: преобразование произведений и сумм, уравнения в рациональных числах, приближенные вычисления с рациональными числами.

Занятия этого раздела создают основу для самостоятельного получения теоретических фактов и решения задач, относящимся к другим темам.

Раздел 6 Иррациональные числа

Данный раздел посвящен иррациональным числам. Теоретический материал этого раздела включает: Определения и основные утверждения. Арифметические операции и операции извлечения корня. Доказательство иррациональности некоторых чисел: примеры из радиkalов. Задачи, решаемые при помощи соображений делимости. Примеры из логарифмов. Доказательство иррациональности значений тригонометрических функций. На занятиях решаются разные задачи с иррациональностью: доказательство непериодичности функций, нестандартные тригонометрические уравнения, нестандартные задачи с квадратными уравнениями.

Занятия этого раздела создают основу для самостоятельного получения теоретических фактов и решения задач, относящимся к другим темам.

Программа курса
«Нестандартные задачи, основанные на теории чисел»
7 класс (34 часа)

№ п/п	Наименование темы	Кол-во часов
1	<i>Натуральные числа</i> Восстановление знаков действий. Задачи на запись натуральных чисел с помощью определенных цифр. Восстановление цифр натуральных чисел. Задачи на сложение, вычитание, умножение. Задачи на деление. Числовые ребусы. Задачи на восстановление записи числа. Другие задачи, связанные с обозначением цифр буквами. Четные и нечетные числа. Четная или нечетная сумма. Четное или нечетное произведение. Проверка на четность. Олимпиадные задачи. Перестановка и зачеркивание цифр в натуральном числе. Последние цифры натурального числа.	14
2	<i>Элементы теории делимости целых чисел</i> Определение и простейшие свойства целых чисел. Признаки делимости. Решение нестандартных задач на делимость. Деление с остатком. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.	20

Программа курса
«Нестандартные задачи, основанные на теории чисел»
8 класс (34 часа)

№ п/п	Наименование темы	Кол-во часов
1	<i>Натуральные числа</i> Введение в натуральные числа. Решение конкурсных задач арифметики натуральных чисел. Делимость. Задачи на делимость, связанные с разложением натуральных чисел на простые множители. Задачи на применение признаков делимости. Делимость суммы, разности, произведения, частного. Простые и составные числа. Решение опорных задач, связанных с простыми числами. Основная теорема арифметики. Бесконечность множества простых чисел. НОД и НОК, способы их нахождения. Взаимно простые числа. Каноническое разложение натуральных чисел.	16
2	<i>Элементы теории делимости целых чисел</i> Задачи на делимость. Задачи на доказательство делимости. Задачи на алгебраические дроби, связанные с делимостью. Задачи на многочлены, связанные с делимостью. Уравнения первой степени с двумя неизвестными в целых числах. Уравнения второй степени с двумя неизвестными в целых числах. Уравнения с несколькими неизвестными в натуральных числах. Неравенства в целых числах. Текстовые задачи. Методы решений. Разные задачи с целыми числами. Фокусы на угадывание неизвестных натуральных чисел. Задачи на числовые таблицы.	18

Программа курса
«Нестандартные задачи, основанные на теории чисел»
9 класс (34 часа)

№ п/п	Наименование темы	Кол-во часов
1	<i>Элементы теории делимости целых чисел</i> Определение и простейшие свойства делимости. Деление целых чисел с остатком. Определение и теорема о делении с остатком. Правила действий с остатками. Принцип Дирихле. Признаки делимости. Решение задач, основанные на рассмотрении остатков. Простые числа. Определение. Простейшие свойства простых чисел. Арифметика остатков: сравнения по данному модулю. Определение и основные свойства сравнений. Признаки делимости целых чисел и сравнения: теорема Вильсона. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное. Каноническое разложение натуральных чисел.	22
2	<i>Уравнения в натуральных и целых числах</i> Диофантовы уравнения первой степени. Нелинейные диофантовы уравнения. Методы решений нелинейных уравнений в целых и натуральных числах.	12

Программа курса
«Нестандартные задачи, основанные на теории чисел»
10 – 11 класс (68 часов)

№ п/п	Наименование темы	Кол-во часов
1	Натуральные числа и системы счисления. Задачи с десятичной системой счисления. Простые и составные натуральные числа. Задачи на свойства простых чисел. Составные числа и формулы сокращенного умножения. Применение основной теоремы арифметики. Признаки делимости и связанные с ними задачи. Задачи на доказательство делимости. Делимость с остатком. Задачи, основанные на рассмотрении остатков. Примеры сочетания нескольких методов. НОД и связанные с ним задачи. НОК и связанные с ним задачи. Теоремы о свойствах НОД и НОК.	14

	<i>Целые числа</i> Задачи на делимость. Делимость с остатком. Обобщенные формулы сокращенного умножения. Применение обобщенных формул сокращенного умножения в задачах на делимость. Комбинированные методы решения задач на делимость. Диофантовы уравнения первого порядка с двумя неизвестными. Основные определения и теоремы. Метод рассмотрения остатков от деления. Метод последовательного уменьшения по модулю коэффициентов. Задачи с диофантовыми уравнениями первого порядка. Диофантовы уравнения второго и высших порядков. Типы уравнений второго порядка. Приемы решения. Уравнений в целых числах второго и высших порядков. Соображения делимости, основная теорема арифметики, НОД и НОК двух чисел. Метод разложения на множители. Метод решения уравнения относительно одного из неизвестных.	
2	Нестандартные решения уравнений. Неравенства в целых числах. Математическая индукция как метод решения неравенств. Метод перебора и проблема его организации. Метод интервалов. Неравенства с несколькими неизвестными. Системы уравнений и неравенств в целых числах. Разложение на множители. Организация перебора. Применение графики. Задачи с параметрами в целых числах. Задачи с натуральными и целочисленными параметрами. Отбор параметров. Различные задачи с целыми числами на квадратный трехчлен. Системы уравнений и неравенств с целыми параметрами или целыми решениями. Экстремальные задачи в целых числах. Вводные замечания и вводная задача. Экстремум квадратного трехчлена с целочисленным аргументом. Как искать экстремум, если $f(n)$ является квадратным трехчленом. Задачи, в которых экстремум – целое число. Неравенства, делимость и перебор. Конкурсные задачи.	30
3	<i>Рациональные числа</i> Свойства числовых дробей. Сократимые и несократимые дроби. Определения. Основное свойство дроби. Правильные, неправильные и смешанные дроби. Сократимость и несократимость дробей. Представление рациональных чисел десятичными дробями. Определения различных десятичных дробей. Перевод обыкновенных дробей в десятичные и наоборот. Преобразование произведений и сумм, уравнения в рациональных числах, приближения рациональными числами. Разные задачи с рациональными числами. Конкурсные задачи.	12
4	<i>Иrrациональные числа</i> Определения и основные утверждения. Арифметические операции и операции извлечения корня. Доказательство иррациональности некоторых чисел: примеры из радикалов. Задачи, решаемые при помощи соображений делимости. Примеры из логарифмов. Доказательство иррациональности значений тригонометрических функций. Доказательство непериодичности функций, нестандартные тригонометрические уравнения, нестандартные задачи с квадратными уравнениями. Разные задачи с иррациональностью. Конкурсные задачи	12

Поурочное планирование курса
«Нестандартные задачи, основанные на теории чисел»
7 класс (34 часа)

№	Раздел	Тема	Ко- ли- че- ство ча- сов	Виды дея- тельности	Формы
<i>1</i>	<i>Натуральные числа</i>		14		
1		Восстановление зна- ков действий	1	Познава- тельная	Познаватель- ная:
2		Задачи на запись на- туральных чисел с помощью определен- ных цифр	1	деятель- ность, Игровая,	исследователь- ская
3		Восстановление цифр натуральных чисел. Задачи на сложение, вычитание, умноже- ние	1	Проблем- но- ценностн ое общение	деятельность, дискуссия, беседа, викторина.
4		Восстановление цифр натуральных чисел. Задачи на деление	1		Игровая:
5		Числовые ребусы. Задачи на восстанов- ление записи числа	1		дискуссионные игры.
6		Числовые ребусы. Другие задачи, свя- занные с обозначени- ем цифр буквами	1		Проблемно- ценностное общение:
7		Четные и нечетные числа. Четная или нечетная сумма	1		деятельность свободного общения, бесе- ды.
8		Четные и нечетные числа. Четное или нечетное произведе- ние	1		
9		Четные и нечетные числа. Проверка на четность	1		
10		Четные и нечетные числа. Решение олим- пиадных задач	1		
11		Перестановка и за- черкивание цифр в натуральном числе	1		
12		Перестановка и за- черкивание цифр в	1		

		натуральном числе			
13		Последние цифры натурального числа	1		
14		Последние цифры натурального числа	1		
2	Элементы теории делимости целых чисел		20		
15		Определение и простейшие свойства целых чисел	1	Познавательная деятельность, Игровая, Проблемно-ценностное общение	Познавательная: исследовательская Игровая: дискуссионные игры.
16		Простейшие свойства целых чисел	1		деятельность, дискуссия, беседа, викторина.
17		Простейшие свойства целых чисел. Решение задач	1		деятельность, дискуссия, беседа, викторина.
18		Простейшие свойства целых чисел. Решение олимпиадных задач	1		дискуссионные игры.
19		Признаки делимости	1		Проблемно-ценностное общение:
20		Признаки делимости. Решение задач на делимость	1		деятельность свободного общения, беседы.
21		Признаки делимости. Решение задач на делимость	1		
22		Признаки делимости. Решение олимпиадных задач на делимость	1		
23		Решение нестандартных задач на делимость	1		
24		Решение нестандартных задач на делимость	1		
25		Решение нестандартных задач на делимость	1		
26		Решение нестандартных задач на делимость	1		
27		Деление с остатком	1		
28		Деление с остатком	1		
29		Деление с остатком	1		
30		Деление с остатком	1		
31		Наибольший общий делитель	1		

32		Наименьшее общее кратное			
33		Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное	1		
34		Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное	1		

Поурочное планирование курса
«Нестандартные задачи, основанные на теории чисел»
8 класс (34 часа)

№	Раздел	Тема	Ко- ли- че- ство ча- сов	Виды дея- тельности	Формы
<i>1</i>	<i>Натуральные числа</i>		16		
1		Введение в натураль- ные числа	1	Познава- тельная деятель- ность, Игровая, Проблем- но- ценостн ое общение	Познаватель- ная: исследователь- ская Игровая: дискуссионные игры. Проблемно- ценостное общение: деятельность свободного общения, беседы
2		Введение в натураль- ные числа. Решение конкурсных задач арифметики нату- ральных чисел	1		
3		Делимость целых чи- сел. Задачи на дели- мость, связанные с разложением нату- ральных чисел на простые множители	1		
4		Задачи на делимость. Задачи на примене- ние признаков дели- мости	1		
5		Делимость суммы, разности, произведе- ния, частного	1		
6		Делимость суммы, разности, произведе- ния, частного	1		
7		Простые и составные числа	1		
8		Простые и составные числа. Решение опор- ных задач, связанных с простыми числами	1		
9		Основная теорема арифметики	1		
10		Бесконечность мно- жества простых чи- сел.	1		
11		НОД, способы нахо- ждения	1		
12		НОД и НОК, способы их нахождения	1		
13		Взаимно простые	1		

		числа			
14		Взаимно простые числа. Решение задач	1		
15		Каноническое разложение натуральных чисел	1		
16		Каноническое разложение натуральных чисел. Решение задач	1		
2	Элементы теории делимости целых чисел		18		
17		Задачи на делимость. Задачи на доказательство делимости	1	Познавательная деятельность, Игровая, Проблемно-ценностное общение	Познавательная: исследовательская
18		Методы решения задач на делимость	1		деятельность, делимость, дискуссия, беседа, викторина
19		Задачи на алгебраические дроби, связанные с делимостью	1		
20		Задачи на многочлены, связанные с делимостью	1		
21		Уравнения первой степени с двумя неизвестными в целых числах	1		Игровая: дискуссионные игры.
22		Приемы решения уравнений первой степени с двумя неизвестными в целых числах	1		Проблемно-ценностное общение:
23		Решение олимпиадных задач: уравнений первой степени с двумя неизвестными в целых числах	1		деятельность свободного общения, беседы.
24		Решение конкурсных задач: уравнений первой степени с двумя неизвестными в целых числах	1		
25		Уравнения второй степени с двумя неизвестными в целых числах	1		
26		Уравнения второй степени с двумя неизвестными в целых числах	1		

27	Уравнения с несколькими неизвестными в натуральных числах	1		
28	Уравнения с несколькими неизвестными в натуральных числах	1		
29	Неравенства в целых числах	1		
30	Неравенства в целых числах. Текстовые задачи	1		
31	Неравенства в целых числах. Методы решений	1		
32	Разные задачи с целыми числами. Фокусы на угадывание неизвестных натуральных чисел	1		
33	Разные задачи с целыми числами. Задачи на числовые таблицы	1		
34	Решение задач по теме «Элементы теории делимости»	1		

Поурочное планирование курса
«Нестандартные задачи, основанные на теории чисел»
9 класс (34 часа)

№	Раздел	Тема	Ко-личе-ство часов	Виды дея-тельности	Формы
1	Элементы теории делимости целых чисел		22		
1		Определение и простейшие свойства делимости	1	Познавательная	Познавательная: исследовательская
2		Определение и простейшие свойства делимости	1	деятельность, Игровая,	деятельность, дискуссия,
3		Деление целых чисел с остатком. Определение и теорема о делении с остатком	1	Проблемно-ценностное общение	беседа, викторина
4		Деление целых чисел с остатком. Правила действий с остатками. Принцип Дирихле	1		Игровая: дискуссионные игры.
5		Деление целых чисел с остатком. Правила действий с остатками. Признаки делимости	1		Проблемно-ценностное общение: деятельность
6		Деление целых чисел с остатком. Решение задач. Основанные на рассмотрении остатков	1		свободного общения,
7		Простые числа. Определение. Простейшие свойства простых чисел	1		беседы.
8		Простые числа. Распределение простых чисел во множестве натуральных чисел	1		
9		Простые числа. Тесты просторы	1		
10		Простые числа. Решение задач на свойства простых чисел	1		
11		Арифметика остатков: сравнения по данному модулю. Определение	1		

		и основные свойства сравнений			
12		Арифметика остатков: решение задач. Признаки делимости целых чисел и сравнения: теорема Вильсона	1		
13		Арифметика остатков: решение олимпиадных задач	1		
14		Арифметика остатков: решение конкурсных задач	1		
15		Наибольший общий делитель	1		
16		Наибольший общий делитель. Решение задач	1		
17		Наименьшее общее кратное	1		
18		Наименьшее общее кратное. Решение задач	1		
19		Каноническое разложение натуральных чисел	1		
20		Каноническое разложение натуральных чисел. Решение задач	1		
21		Решение олимпиадных задач по теме «НОД и НОК»	1		
22		Решение олимпиадных задач на применение канонического разложения натуральных чисел	1		
2	Уравнения в натуральных и целых числах		12		
23		Диофантовы уравнения первого порядка с двумя неизвестными	1	Познавательная деятельность, Игровая, Проблемно-ценостное	Познавательная исследовательская деятельность, Игровая, Проблемно-ценостное
24		Основные определения и теоремы. Метод рассмотрения остатков от деления	1		
25		Метод последовательного уменьшения по модулю коэффициен-	1		

		тов при неизвестных		общение	торина
26		Задачи с диофантовыми уравнениями первого порядка	1		
27		Нелинейные диофантовы уравнения. Диофантовы уравнения второго и высших порядков. Типы уравнений второго порядка. Приемы решения.	1		Игровая: дискуссионные игры. Проблемно-ценностное общение: деятельность свободного общения, беседы
28		Уравнений в целых числах второго и высших порядков. Сображения делимости, основная теорема арифметики	1		
29		НОД и НОК двух чисел. Метод разложения на множители	1		
30		Метод решения уравнения относительно одного из неизвестных. Нестандартные решения уравнений.	1		
31		Методы решений нелинейных уравнений в целых и натуральных числах	1		
32		Методы решений нелинейных уравнений в целых и натуральных числах	1		
33		Решение олимпиадных задач по теме «Уравнения в натуральных и целых числах»	1		
34		Решение олимпиадных задач по теме «Уравнения в натуральных и целых числах»	1		

Поурочное планирование курса
«Нестандартные задачи, основанные на теории чисел»
10 – 11 класс (68 часов)

№	Раздел	Тема	Коли-чество часов	Виды дея-тельности	Формы
1	<i>Натуральные числа</i>		14		
1		Натуральные числа и системы счисления. Задачи с десятичной системой счисления	1	Познаватель-ная деятельность,	Позна- ватель- ная:
2		Простые и составные натуральные числа. Задачи на свойства простых чисел	1	Игровая, Проблемно-ценное общение	исследо- ватель- ская дея- тель- ность, дискус- сия, беседа, виктори- на
3		Составные числа и формулы сокращенного умножения. Применение основной теоремы арифметики	1		
4		Признаки делимости и связанные с ними задачи. Задачи на доказательство делимости	1		Игро- вая:
5		Делимость с остатком. Задачи, основанные на рассмотрении остатков	1		дискус- сионные игры.
6		Примеры сочетания нескольких методов	1		Пробле- мно- ценное обще- ние:
7		НОД и связанные с ним задачи	1		дея- тель- ность свобод- ного обще- ния, беседы
8		НОД и связанные с ним задачи	1		
9		НОК и связанные с ним задачи	1		
10		НОК и связанные с ним задачи	1		
11		Теоремы о свойствах НОД и НОК	1		
12		Теоремы о свойствах НОД и НОК	1		
13		Решение олимпиадных задач по теме «Натуральные числа»	1		
14		Решение олимпиадных задач по теме	1		

		«Натуральные числа»		
2	<i>Целые числа</i>		30	
1		Задачи на делимость. Делимость с остатком	1	
2		Обобщенные формулы сокращенного умножения. Применение обобщенных формул сокращенного умножения в задачах на делимость	1	
3		Комбинированные методы решения задач на делимость	1	
4		Комбинированные методы решения задач на делимость	1	
5		Диофантовы уравнения первого порядка с двумя неизвестными. Основные определения и теоремы. Метод рассмотрения остатков от деления	1	
6		Метод последовательного уменьшения по модулю коэффициентов. Задачи с диофантовыми уравнениями первого порядка	1	
7		Диофантовы уравнения второго и высших порядков. Типы уравнений второго порядка. Соображения делимости, основная теорема арифметики	1	
8		Метод разложения на множители. Метод решения уравнения относительно одного из неизвестных. Нестандартные решения уравнений.	1	
9		Неравенства в целых числах. Математическая индукция как метод решения неравенств	1	
10		Метод перебора и проблема его организации. Метод интервала	1	

		лов. Неравенства с несколькими неизвестными		
11		Системы уравнений и неравенств в целых числах	1	
12		Разложение на множители	1	
13		Организация перебора	1	
14		Применение графики	1	
15		Задачи с параметрами в целых числах	1	
16		Задачи с натуральными и целочисленными параметрами	1	
17		Отбор параметров	1	
18		Различные задачи с целыми числами на квадратный трехчлен	1	
19		Системы уравнений и неравенств с целыми параметрами или целыми решениями	1	
20		Системы уравнений и неравенств с целыми параметрами или целыми решениями	1	
21		Экстремальные задачи в целых числах. Вводные замечания и вводная задача	1	
22		Экстремум квадратного трехчлена с целочисленным аргументом	1	
23		Экстремум квадратного трехчлена с целочисленным аргументом	1	
24		Как искать экстремум, если $f(n)$ не является квадратным трехчленом	1	
25		Как искать экстремум, если $f(n)$ не является квадратным трехчленом	1	
26		Задачи, в которых экстремум – целое число	1	

27		Неравенства, делимость и перебор	1		
28		Конкурсные задачи по теме «Целые числа»	1		
29		Конкурсные задачи по теме «Целые числа»	1		
30		Конкурсные задачи по теме «Целые числа»	1		
3	<i>Рациональные числа</i>		12		
1		Свойства числовых дробей	1		
2		Сократимые и несократимые дроби	1		
3		Основное свойство дроби. Правильные, неправильные и смешанные дроби	1		
4		Сократимость и несократимость дробей	1		
5		Представление рациональных чисел десятичными дробями. Определения различных десятичных дробей	1		
6		Перевод обыкновенных дробей в десятичные и наоборот	1		
7		Преобразование произведений и сумм	1		
8		Уравнения в рациональных числах, приближения рациональными числами	1		
9		Разные задачи с рациональными числами.	1		
10		Конкурсные задачи по теме «. Рациональные числа»	1		
11		Конкурсные задачи по теме «. Рациональные числа»	1		
12		Конкурсные задачи по теме «. Рациональные числа»	1		
4	<i>Иррациональные числа</i>		12		

	<i>ла</i>				
1		Определения и основные утверждения	1		
2		Арифметические операции и операции извлечения корня	1		
3		Доказательство иррациональности некоторых чисел: примеры из радикалов	1		
4		Задачи, решаемые при помощи соображений делимости. Примеры из логарифмов	1		
5		Доказательство иррациональности значений тригонометрических функций	1		
6		Доказательство непериодичности функций	1		
7		Нестандартные тригонометрические уравнения	1		
8		Нестандартные задачи с квадратными уравнениями	1		
9		Разные задачи с иррациональностью	1		
10		Конкурсные задачи по теме «Иррациональные числа»	1		
11		Конкурсные задачи по теме «Иррациональные числа»	1		
12		Конкурсные задачи по теме «Иррациональные числа»	1		

Литература

1. *Башмакова И.Г.* Диофант и диофантовы уравнения. – М.: Наука, 1972.
2. Галкин В. Я., Сычугов Д. Ю., Хорошилова Е. В. Конкурсные задачи, основанные на теории чисел. – М., факультет ВМиК МГУ 2002 – 180 стр.
3. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: Учеб. пособие для учащихся 7 – 11 кл. – Челябинск: Взгляд. 2005. – 271 с. – (нестандартные задачи по математике)
4. Алфутова Н. Б., Устинов А.В. алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М.: МЦНМО, 2002. – 264 с.
5. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004. – 500 с.
6. Кострикина Н. П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7 – 9 классов: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1991. – 239 с.
7. Галицкий М. Л. и др. Сборник задач по алгебре для 8 – 9 классов: Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич. - 2-е изд. – М.: Просвещение, 1994. – 271 с.
8. *Фоминых Ю.Ф.* Диофантовы уравнения //Математика в шк. – 1996. - №6.
9. *Бабинская И. Л.* Задачи математических олимпиад. – М., 1975.
10. *Васильев Н.Б.* Задачи Всесоюзных математических олимпиад. – М., 1998.
11. *Курляндчик Л.* Метод бесконечного спуска // Приложение к журналу «Квант». 1999. – №3.
12. *Яковлев Г.Н.* Всесоюзные математические олимпиады школьников. М., 1992.
13. *Серпинский В.* О решении уравнений в целых числах. – М, 1961.
14. *Бардышкин В.В., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А.* Делимость чисел и решение уравнений в целых числах (теория и задачи с решениями). – М.: МГИЭТ(ТУ), 1999.
15. *Болтянский В.Г., Левитас Г.Г.* Делимость чисел и простые числа //В кн. «Дополнительные главы по курсу математики 7 – 8»//. – М.: Просвещение, 2-е издание, 1974, с. 5 – 69.
16. *Воробьев Н.Н.* Признаки делимости (популярные лекции по математике). – М.: Наука, 1980.
17. *Галкин Е.* Задачи с целыми числами. – М.: «Математика», 1999 – 2000.
18. *Гельфанд А.О.* Решение уравнений в целых числах (популярные лекции по математике). – М.: Наука. 1983.
19. *Малинин В.* Решение уравнений в натуральных и целых числах. – М.: «Математика», 2001, №№ 21 – 22.
20. *Федотов М.В., Хайлов Е.Н.* Подготовка к вступительным экзаменам в МГУ. Задачи устного экзамена по математике. – М.: ВМиК МГУ, 2002.
21. *Каннель-Белов А. Я., Ковальджи А. К.* Как решают нестандартные задачи / Под ред. В. О. Бугаенко. – 4-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2008. – 96 с.
22. *Евдокимова М. А., Кукин Г. П.* Задачи на разрезание. – М.: МЦНМО, 2002. – 120 с.
23. *Задачи по математике.* Предлагавшиеся ученикам математического класса 57 школы (выпуск 2004 года, класс «Д») / Под ред. В. Доценко. – М.: МЦНМО, 2004.
24. *Тихомиров В. М.* Великие математики прошлого и их великие теоремы. 2-изд., испр. (Серия: «Библиотека «Математическое просвещение»». Вып. 1). – М.: МЦНМО, 2003. – 16 с.
25. *Депман И. Я., Виленкин Н. Я.* За страницами учебника математики: Пособие для учащихся 5 – 5 кл. – 2-е изд. – М.: Просвещение. 1999. – 287 с.
26. *Виленкин Н. Я. и др.* За страницами учебника математики. Арифметика. Алгебра. Геометрия.: Кн. для учащихся 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений / Н. Я. Виленкин, Л. П. Шибасов, З. Ф. Шибасова. – М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.». 1996. – 320 с.

27. *Задания для подготовки к письменному экзамену по математике в 9 классе: Пособие для учителя / Л. И. Звавич, Д. И. Аверьянов, Б. П. Пигарев. Т. Н. Трушалина.* – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2000. – 112 с.
28. *Потапов М. К. Алгебра. Дидактические материалы для 7 кл. / М. К. Потапов, А. В. Шевкин.* – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2006. – 64 с.
29. *Ерикова А. П., Голобородько В. В. Самостоятельные и контрольные работы по математике для 6 класса.* – М.: Илекса. 2004. – 160 с.
30. *Звавич Л. И. и др. Алгебра и начала анализа. 8 – 11 кл.: Пособие для школ и классов с углубленным изучением математики / Л. И. Звавич, Л. Я. Шляпочник, М. В. Чинкина.* – М.: Дрофа, 1999. – 352 с.
31. МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011(типовые задания С6)ЗАДАЧИ НА ЦЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА(от учебных задач до олимпиадных) Корянов А.Г., г. Брянск, akoryanov@mail.ru, Прокофьев А.А., г. Москва, aaprokof@yandex.ru (<https://studylib.ru/doc/2564553/tipovye-zadaniya-c6>)
32. Алфутова Н. Б. Устинов А. В. А45 Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ.— М.: МЦНМО, 2002.— 264 с.
33. Математика. ЕГЭ. Алгебра: задания с развернутым ответом: учебно-методическое пособие/ Под ред. Ф.Ф.Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов – на – Дону: Легион, 2016.
34. Математика. ЕГЭ. Задачи на целые числа(типовые задания19)/Прокофьев А.А., Корянов А.Г. – Ростов – на Дону: Легион, 2016.
35. Задачи по математике Олимпиады «Росатом – 2009»(с решениями и ответами)./Под редакцией д-ра физ. - мат. Наук, проф. О.В. Нагорнова. – М.: НИЯУ МИФИ,2010.
36. Делимость целых чисел. Учебное пособие для учащихся ОЛ ВЗМШ. (Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмакер – М., Изд. ЛО ВЗМШ, 2005г).
37. Внеклассическая деятельность по математике. Часть 1: учебное пособие/Н.Н.Штыков, Е.С.Лапшина, А.И. Ковыршина.- Иркутск: Издательство «Аспринт», 2018.
38. Математика. 6-11 классы. Подготовка к олимпиадам: основные идеи, темы, типы задач/под ред. Ф.Ф.Лысенко, Е.Г.Конновой.-4-е изд. перераб. и доп. - Ростов на – Дону: Легион,2018.
39. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов/ под ред. И.В Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2019.
40. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 36 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий/И.В.Ященко, М.А. Волчекевич, И.Р. ВЫсоцкий, Р.К.Гордин, П.В.Семёнов, О.Н.Косухин, Д.А.Фёдоровых, А.И. суждальцев, А.Р.Рязановский, В.А.Смирнов, А.С.Трепалин, А.В. Хачатурян, С.А.Шестаков, Д.Э.Шноль; под редакцией И.В.Ященко. – М.: Издательство «Экзамен»,2020.
41. ЕГЭ. Математика. Задания типа С/ И.Н.Сергеев. – М.: Издательство «Экзамен», 2010.

Литература для учителя

1. Галкин В. Я., Сычугов Д. Ю., Хорошилова Е. В. Конкурсные задачи, основанные на теории чисел. – М., факультет ВМиК МГУ 2002 – 180 стр.
2. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: Учеб. пособие для учащихся 7 – 11 кл. – Челябинск: Взгляд. 2005. – 271 с. – (нестандартные задачи по математике)
3. Алфутова Н. Б., Устинов А.В. алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М.: МЦНМО, 2002. – 264 с.
4. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004. – 500 с.
5. Кострикина Н. П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7 – 9 классов: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1991. – 239 с.

6. Галицкий М. Л. и др. Сборник задач по алгебре для 8 – 9 классов: Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич.- 2-е изд. – М.: Просвещение, 1994. – 271 с.

Литература для учащихся

1. Галкин В. Я., Сычугов Д. Ю., Хорошилова Е. В. Конкурсные задачи, основанные на теории чисел. – М., факультет ВМиК МГУ 2002 – 180 стр.
2. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: Учеб. пособие для учащихся 7 – 11 кл. – Челябинск: Взгляд. 2005. – 271 с. – (нестандартные задачи по математике)
3. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004. – 500 с.
4. Галицкий М. Л. и др. Сборник задач по алгебре для 8 – 9 классов: Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич.- 2-е изд. – М.: Просвещение, 1994. – 271